

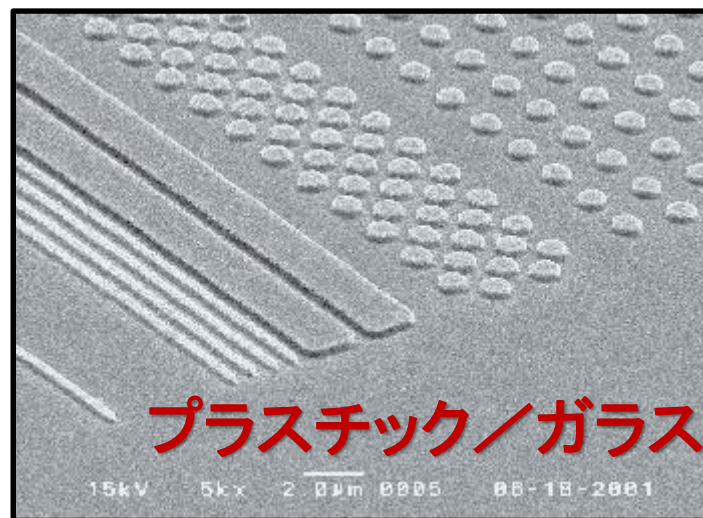
# F-bar援用の四面体平滑化有限要素法 によるゴム粘弾性大変形解析

東京工業大学  
工学院 システム制御系  
大西 有希

# 研究背景

## 実現したい内容:

- 「超」大変形問題を高精度かつ安定に解きたい。
- 複雑形状を四面体で解きたい。
- 微圧縮性が現れる材料も解きたい。
- 自動リメッシングも実現したい。
- 接触も扱いたい。



# 既存手法の問題点

四面体を用いる既存のFEMは**微圧縮性が現れる材料**の解析において精度と安定性に未だ問題がある。

## ■ 高次要素:

✗ 体積ロッキングが不可避。

中間節点の存在による接触や大変形の精度低下と不安定。

## ■ 拡張ひずみ仮定法(EAS):

✗ 擬似ゼロエネルギーモードにより不安定。

## ■ B-bar法, F-bar法, Selective法:

✗ 四面体要素にはそのまま適用できない。

## ■ F-barパッチ法:

✗ 良いパッチを作ることが難しい。

## ■ u/p混合(ハイブリッド)法:

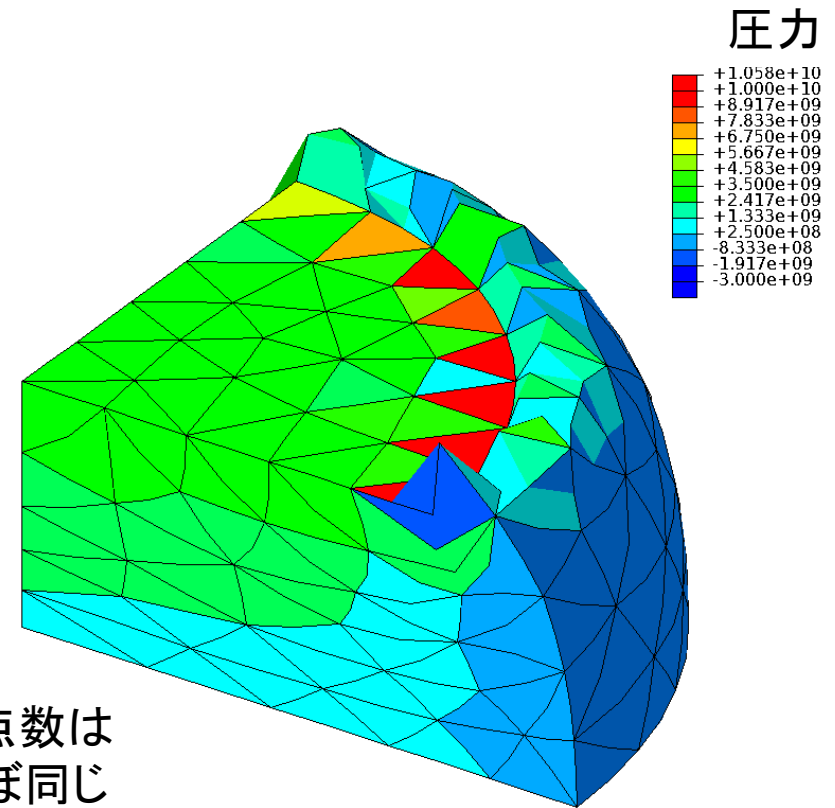
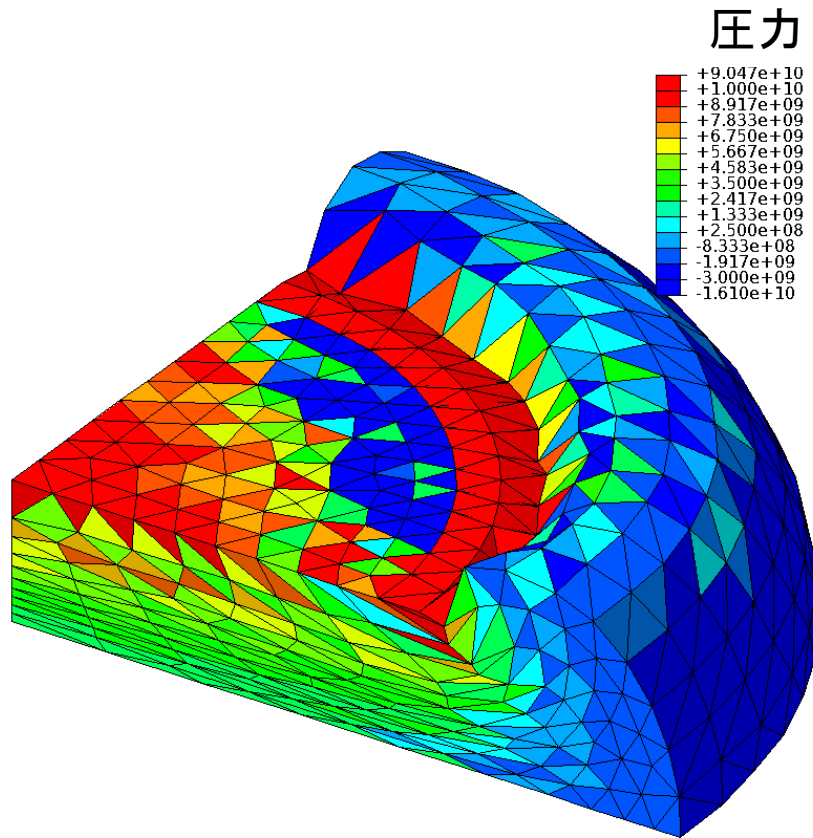
✗ 今のところ完全に満足できる定式化が提案されていない。

ただし, ある程度許容出来るものは提案されている。

(例: ABAQUS/Standardの「**C3D4H**」や「**C3D10MH**」など)

# 既存手法の問題点(つづき)

四面体解析例) 材料: neo-Hookean 超弾性体,  $\nu_{ini} = 0.49$



節点数は  
ほぼ同じ

## 四面体1次ハイブリッド要素(C3D4H)

- ✓ 体積ロッキングなし.
- ✗ 圧力振動(チェッカーボード)あり.
- ✗ せん断/コーナーロッキングあり.

## 四面体2次修正ハイブリッド要素(C3D10MH)

- ✓ せん断/体積ロッキングなし.
- ✗ 内挿の精度低下あり.
- ✗ 大変形で早期の収束困難あり.

# 解決策

平滑化有限要素法 (Smoothed Finite Element Method: S-FEM) という新しい有限要素定式化のアイデアが近年提案され、研究が進んでいる。

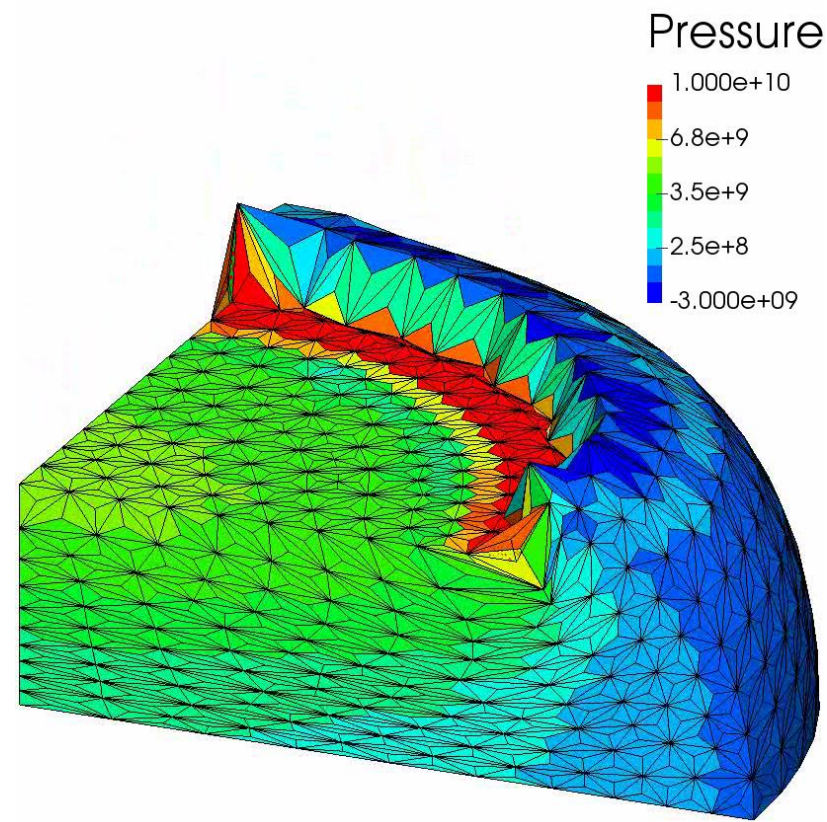
特に、最新の S-FEM 定式化である F-bar ES-FEM-T4 (詳細は後述) は超弾性体および弾塑性体の静解析および動解析で

- 4節点四面体要素 (中間節点なし)
- せん断 / 体積 / コーナーロッキングフリー
- 圧力振動フリー
- 大変形でも安定

の全てを満足する定式化であることが確認された。

# 解決策(つづき)

四面体解析例) 材料: neo-Hookean 超弾性体,  $\nu_{ini} = 0.49$



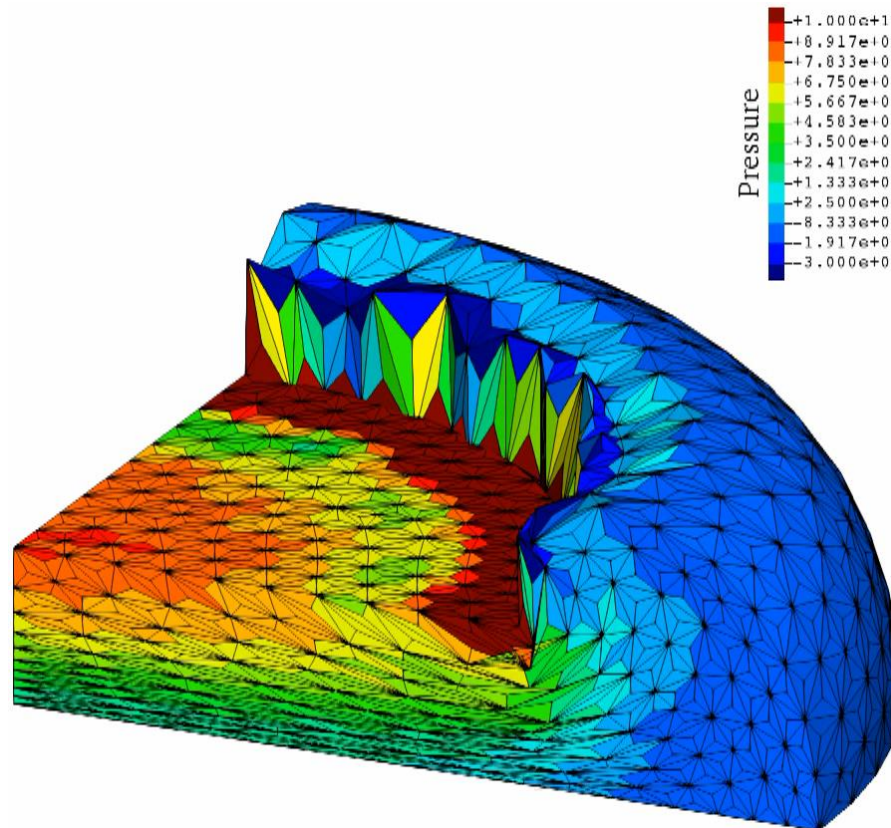
メッシュは  
先程のC3D4H  
と同じ.

## 昨年度までのF-barES-FEM-T4

- ✓ せん断・体積ロッキングなし.
- ✓ 圧力振動は充分小さい.
- ✓ コーナーロッキングも充分小さい.

# 解決策(つづき)

四面体解析例) 材料: neo-Hookean 超弾性体,  $\nu_{ini} = 0.49$



メッシュは  
先程のC3D4H  
と同じ.

今年度のF-barES-FEM-T4

✓ さらにロバスト性が向上.

ただし, 粘弾性体の準静的解析への適用は未検討.

# 発表内容

最新の四面体平滑化有限要素法(S-FEM)定式化であるF-barES-FEM-T4をゴム粘弾性大変形解析に適用し, 精度と安定性を評価する.

## 発表目次:

- 今年度版F-barES-FEM-T4の定式化概要
- ゴム粘弾性大変形解析例
- まとめ



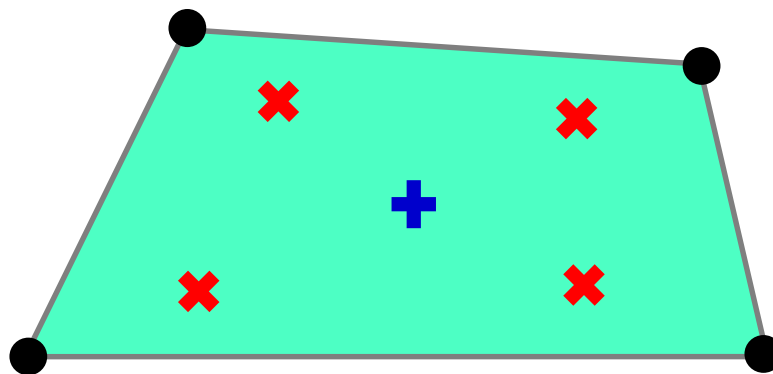


# 今年度版F-barES-FEM-T4 の定式化概要



# F-bar法のおさらい

四角形(Q4)要素  
および  
六面体(H8)要素  
のための手法



体積成分に対する  
一種の  
ローパスフィルター

## アルゴリズム

- 標準的FEMと同様, **各積分点**で変形勾配  $F$  を計算する.
- **要素中心**でも変形勾配  $F$  を計算し, その体積変化率  $\det(F)$ を  $\bar{J}$  とおく.
- **各積分点**の変形勾配を次式により修正し, **合成された  $\bar{F}$** を得る.

$$\bar{F} = \bar{J}^{1/3} F^{\text{iso}}.$$

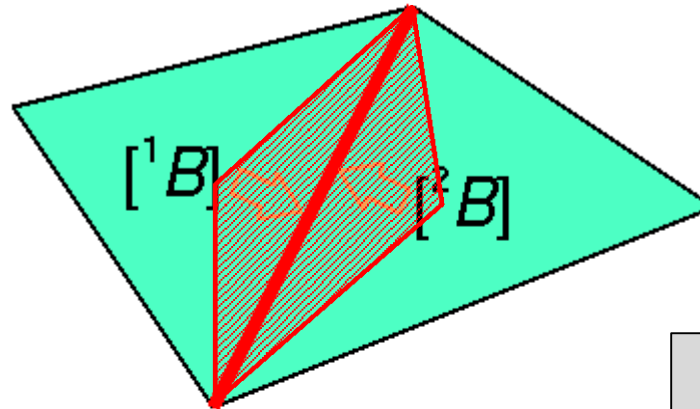
- $\bar{F}$  を**各積分点**変形勾配とみなし, 応力・内力・剛性等計算する.

変形勾配の等積成分はそのままに, 体積成分にはローパスフィルターをかけることで**体積ロッキングを回避できる**.

# ES-FEMのおさらい

- 要素の $[B]$ を通常のFEMと同様に計算する.
- 要素の $[B]$ を周囲の**エッジ**に要素体積を重みとして配り,  
**エッジ**で平均化して $[^{\text{Edge}} B]$ を作る.
- **エッジ**の平滑化領域の量として歪み, 応力, 節点内力を計算する.

積分点が  
各エッジ中心に  
あるイメージ



$[^{\text{Edge}} B]$

Edge  $T$

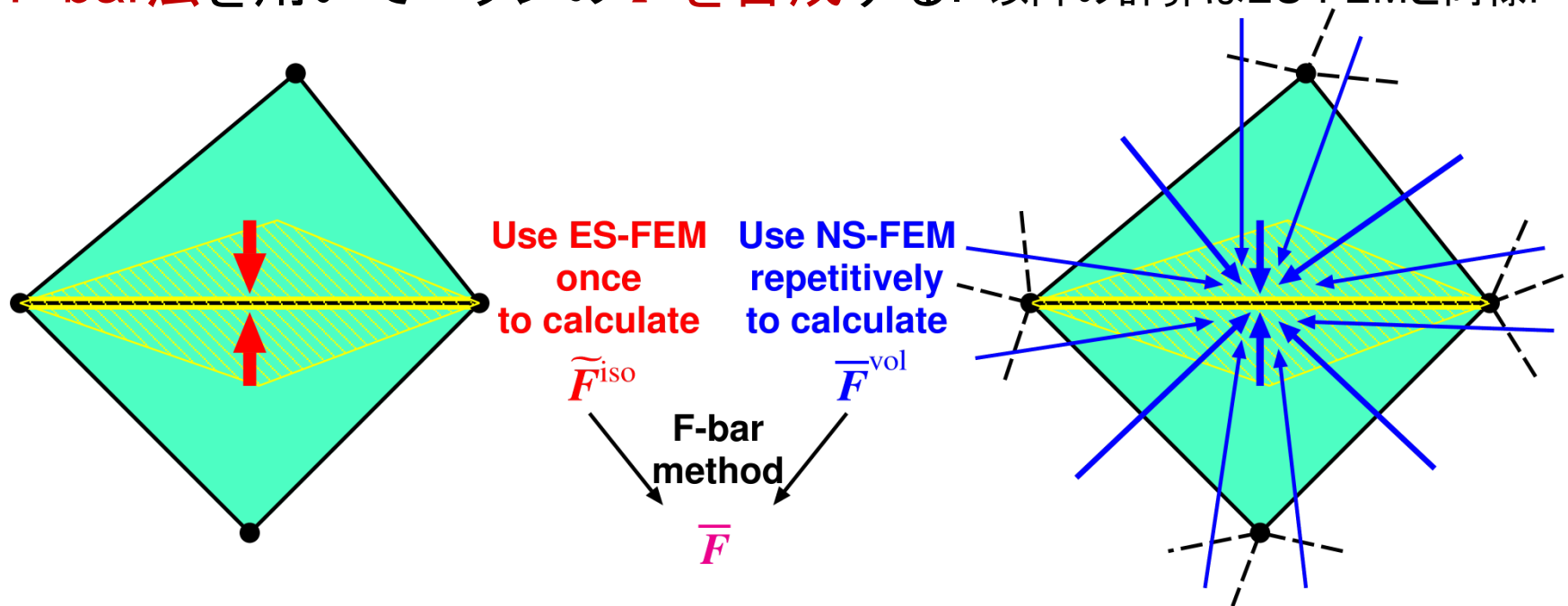
$\{f^{\text{int}}\}$

**ES-FEM**

体積ロッキングや  
圧力振動を抑える  
ことは出来ないが,  
**四面体要素で  
せん断ロッキングを  
回避できる.**

# F-barES-FEMの定式化概要

- エッジの  $F^{iso}$  をES-FEMを用いて計算する.
- エッジの  $\bar{J}$  にはNS-FEMを繰り返し適用して空間的にローパスフィルタされた  $J$  の値を用いる.
- F-bar法を用いてエッジの  $\bar{F}$  を合成する. 以降の計算はES-FEMと同様.



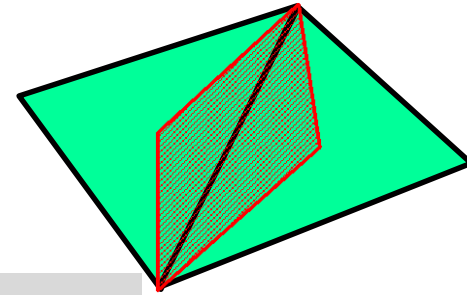
せん断／体積／コーナーロッキング  
および圧力振動が発生しない。

# 内力の計算方法

今年度変更点: 内力計算における担当体積の定義を変更.

➤ 昨年度までのF-barES-FEM-T4:

$$\{f^{\text{int}}\} = \sum [\tilde{B}] \{\bar{T}\} \tilde{V}$$



ES-FEMの  
担当体積

➤ 今年度のF-barES-FEM-T4:

$$\{f^{\text{int}}\} = \sum [\tilde{B}] \{\bar{T}\} \bar{V}$$

注)

~ (チルダ): ES-FEMに由来する量

— (バー): F-bar法に由来する量

ES-FEMの  
初期担当体積 $\tilde{V}^{\text{ini}}$   
に体積変化率 $\bar{J}$   
を掛けたもの

エッジの担当体積を $\tilde{V}$ から $\bar{V}$ に変更しただけ.

たったこれだけの変更でロバスト性が向上する. ただしその理由は現在不明.



# 粘弾性の取り扱い

一般化Maxwellモデルにより粘弾性を考慮したHencky粘弾性体(極々普通の粘弾性材料モデル)を対象.

## ■ 応力

$$\begin{cases} T^{\text{hyd}} = K \text{tr}(\mathbf{H}) \mathbf{I}, \\ T^{\text{dev}} = 2G_0 \left( \mathbf{H}^{\text{dev}} - \sum g_i \mathbf{H}_i^{\text{V}} \right). \end{cases}$$

体積弾性率    Hencky(対数)歪み  
瞬間横弾性係数    Prony係数    粘性歪み

静水圧成分は粘性なし  
偏差成分のみ粘性あり

## ■ 粘性歪みの時間発展

$$\mathbf{H}_i^{\text{V}+} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{H}_i^{\text{V}} \cdot \mathbf{R}^{\text{T}} + \Delta \mathbf{H}_i^{\text{V}}.$$

増分内剛体回転    粘性歪み増分

## ■ 解くべき方程式

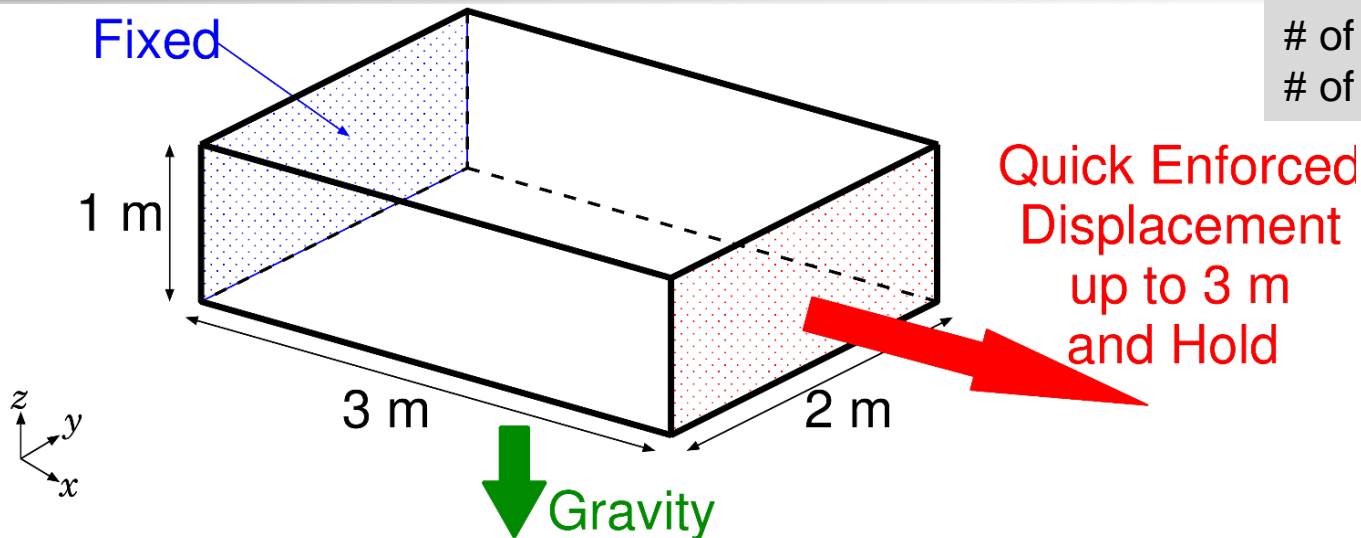
$$[K]\{\delta u\} = \{f^{\text{ext}}\} - \{f^{\text{int}}\}$$

慣性は考慮しないので  
静的解析と同じ.

# 粘弾性体の準静的解析例

# 粘弾性ブロックの引張懸垂解析

## 概要

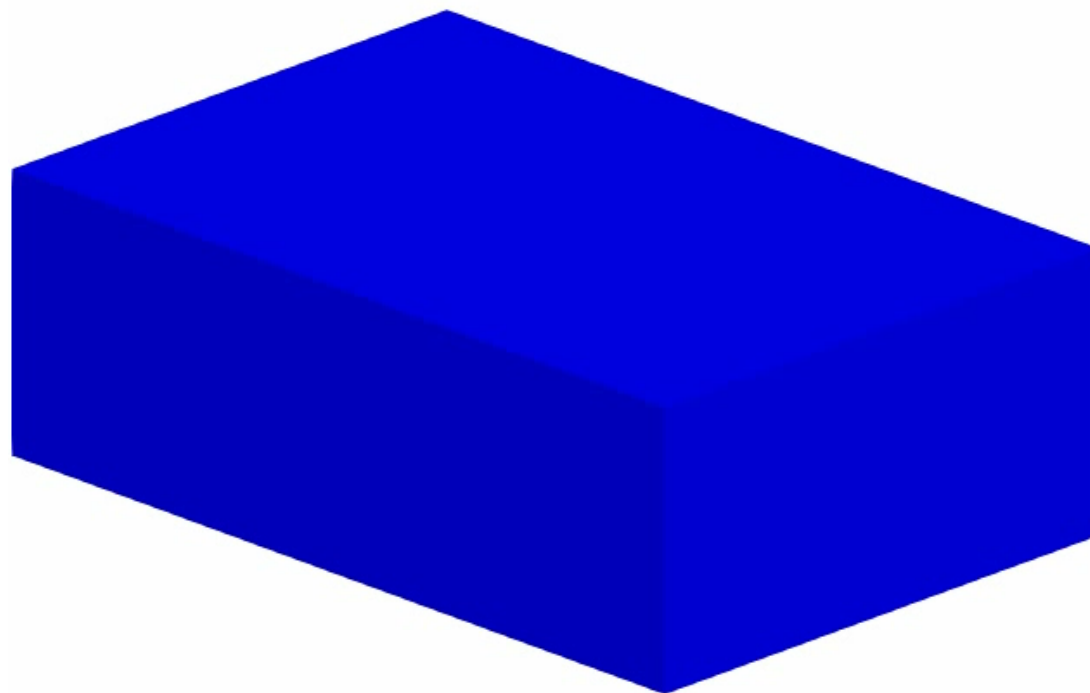


- 1m x 2m x 3m のブロックを10秒で100%引き伸ばした後，その変位を維持して重力で懸垂させる。
- 一般化Maxwellモデルにより粘弾性を考慮したHencky粘弾性体。瞬間ポアソン比 0.3, 長期ポアソン比約 0.49, Prony級数はせん断成分に対して1つだけで，緩和時定数は10秒。
- F-barES-FEM-T4(2)を用いて解析。
- ABAQUSの4節点四面体要素(C3D4), 同ハイブリッド要素(C3D4H)および8節点六面体選択的低減積分(C3D8)と比較。

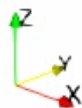
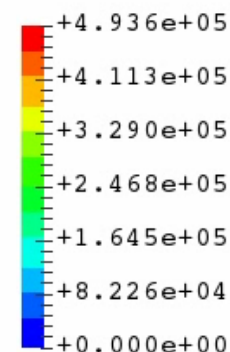


# 粘弾性ブロックの引張懸垂解析

## Mises応力分布アニメ (F-barES-FEM-T4(2))



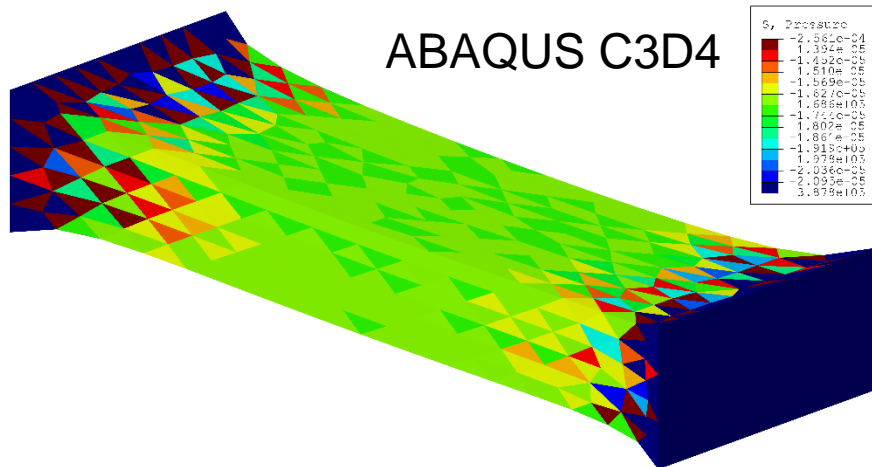
Mises\_Stress



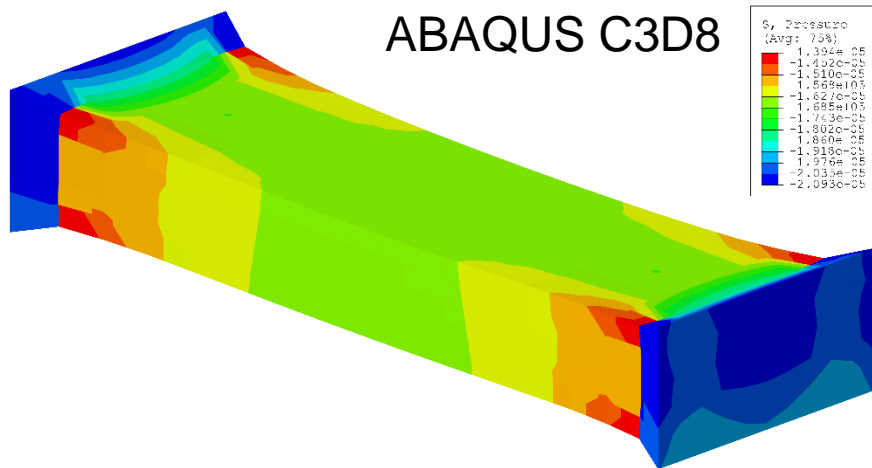
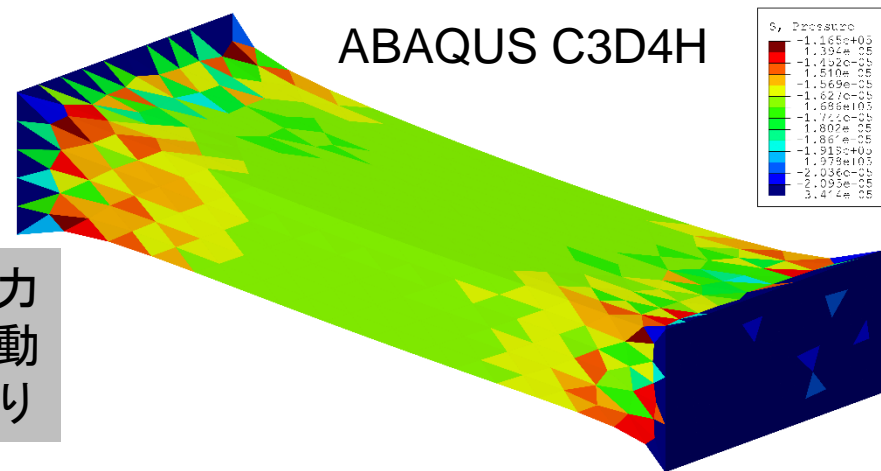
引張終了以降  
応力緩和が進  
んでいる。

# 粘弾性ブロックの引張懸垂解析

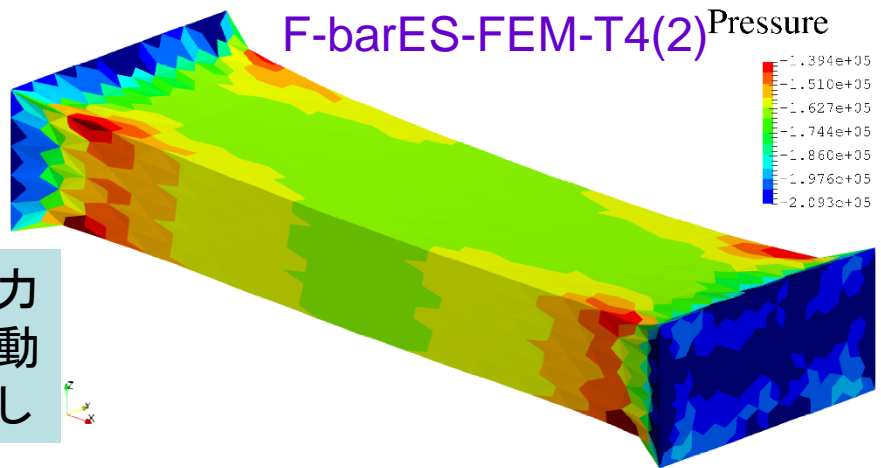
## 引張終了時の圧力分布 (コンターレンジは共通)



圧力  
振動  
あり

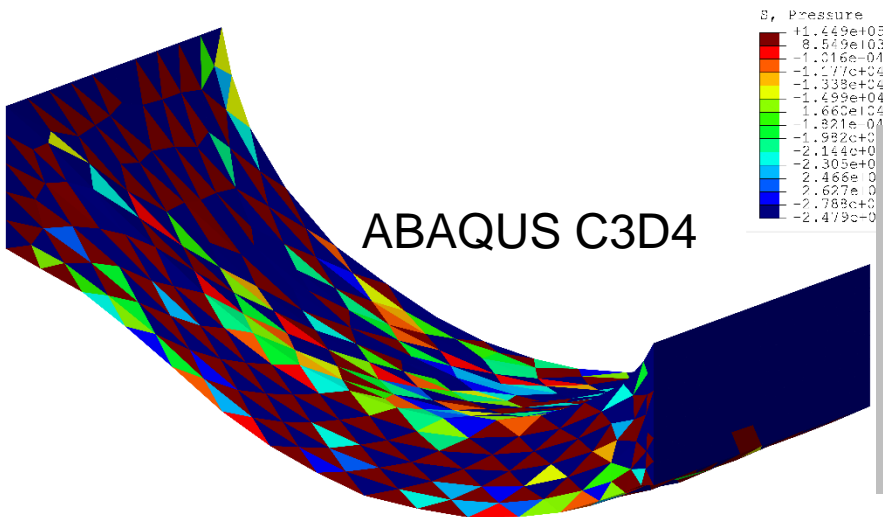


圧力  
振動  
なし

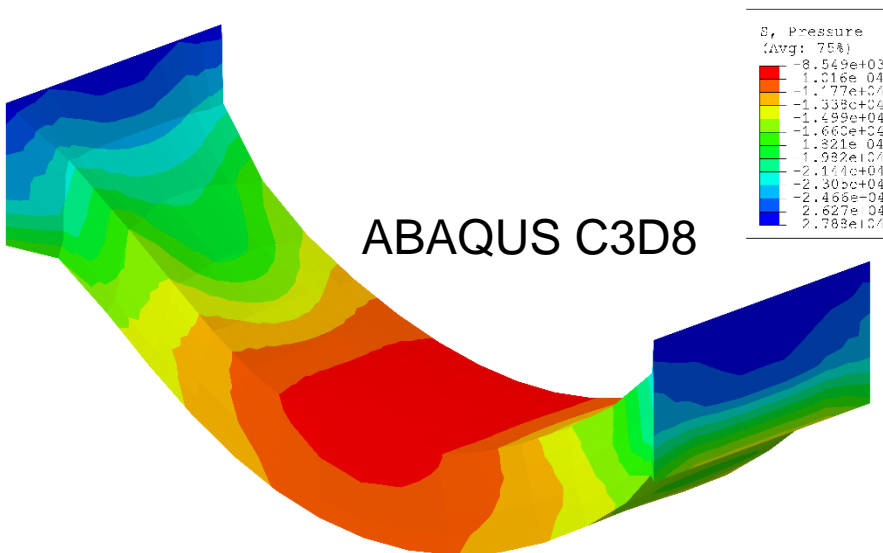
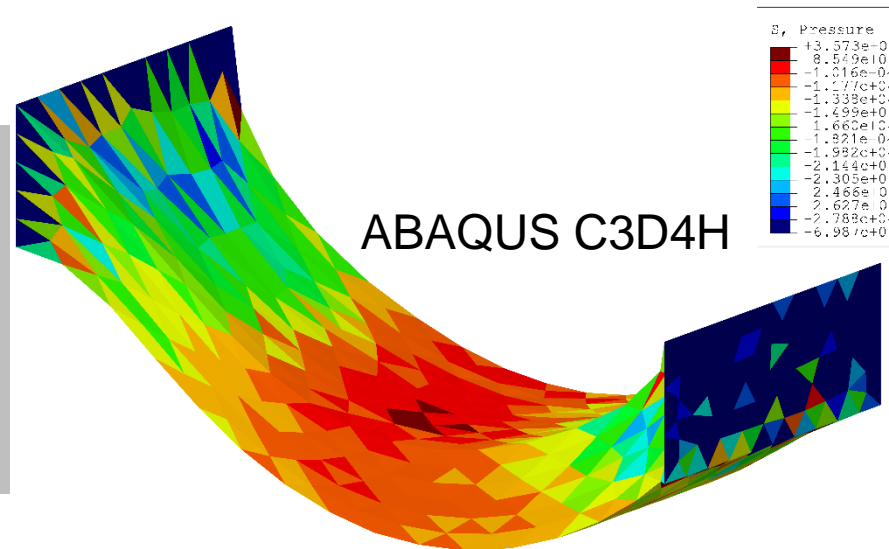


# 粘弾性ブロックの引張懸垂解析

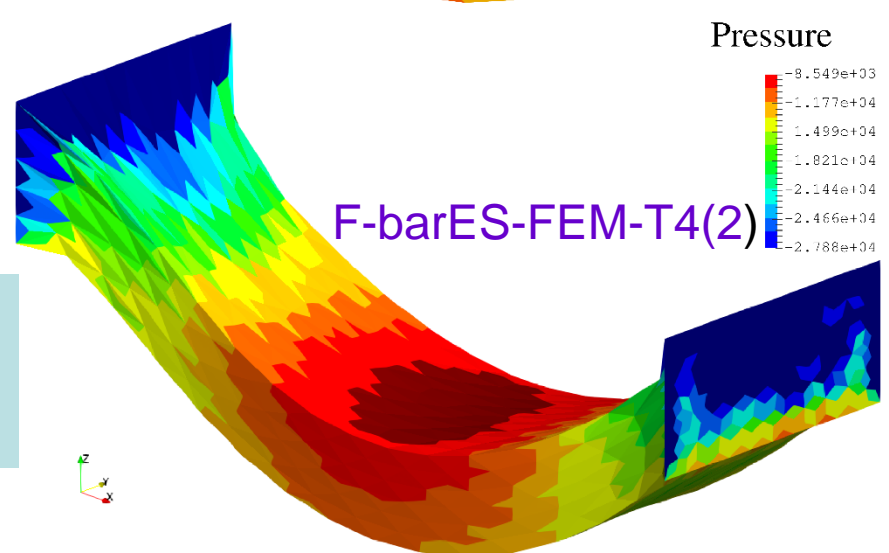
## 最終時刻の圧力分布 (コンターレンジは共通)



酷い  
圧力  
振動  
あり  
+  
硬い

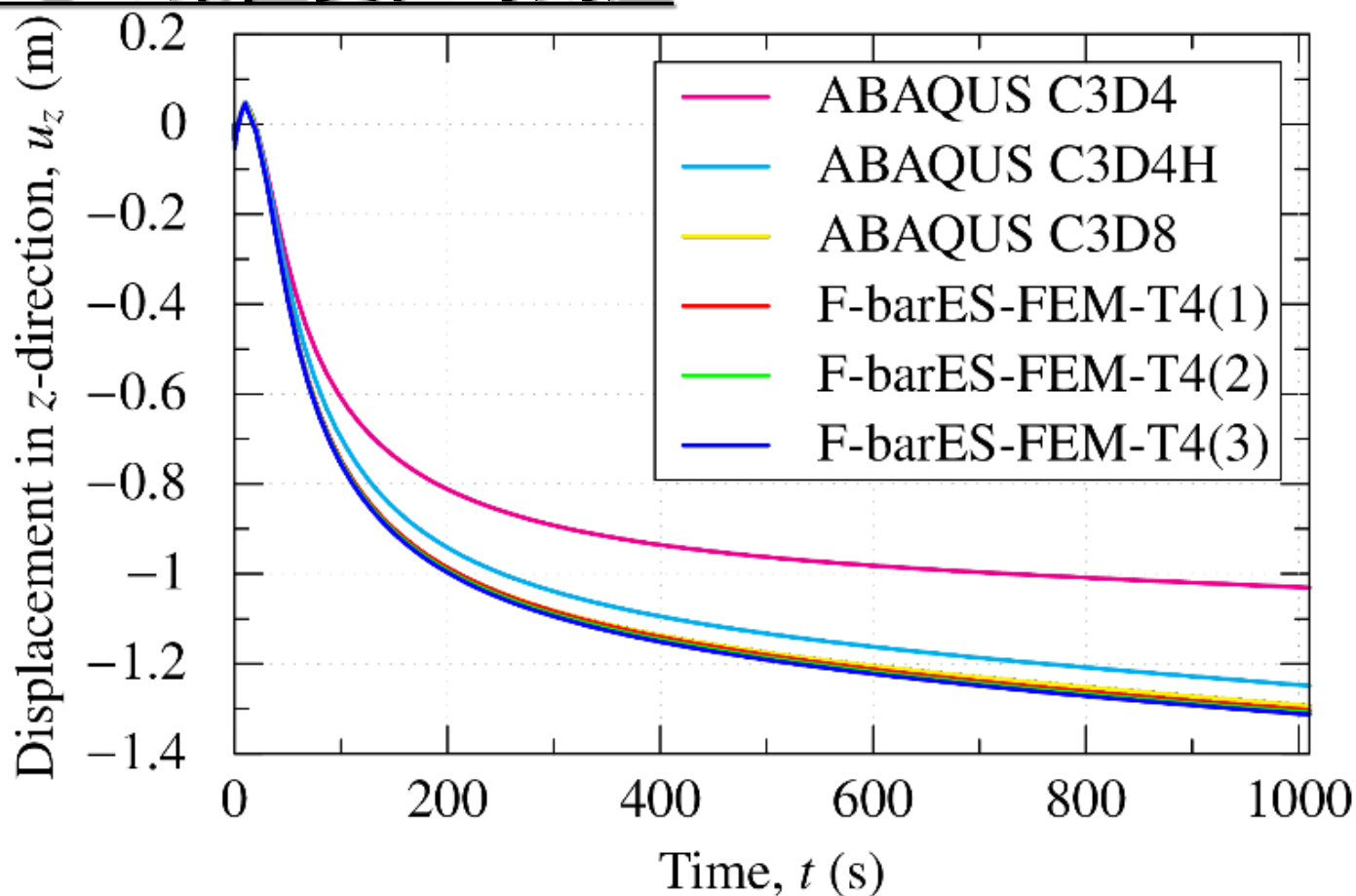


圧力  
振動  
なし



# 粘弾性ブロックの引張懸垂解析

## 底面中心の鉛直変位時刻歴

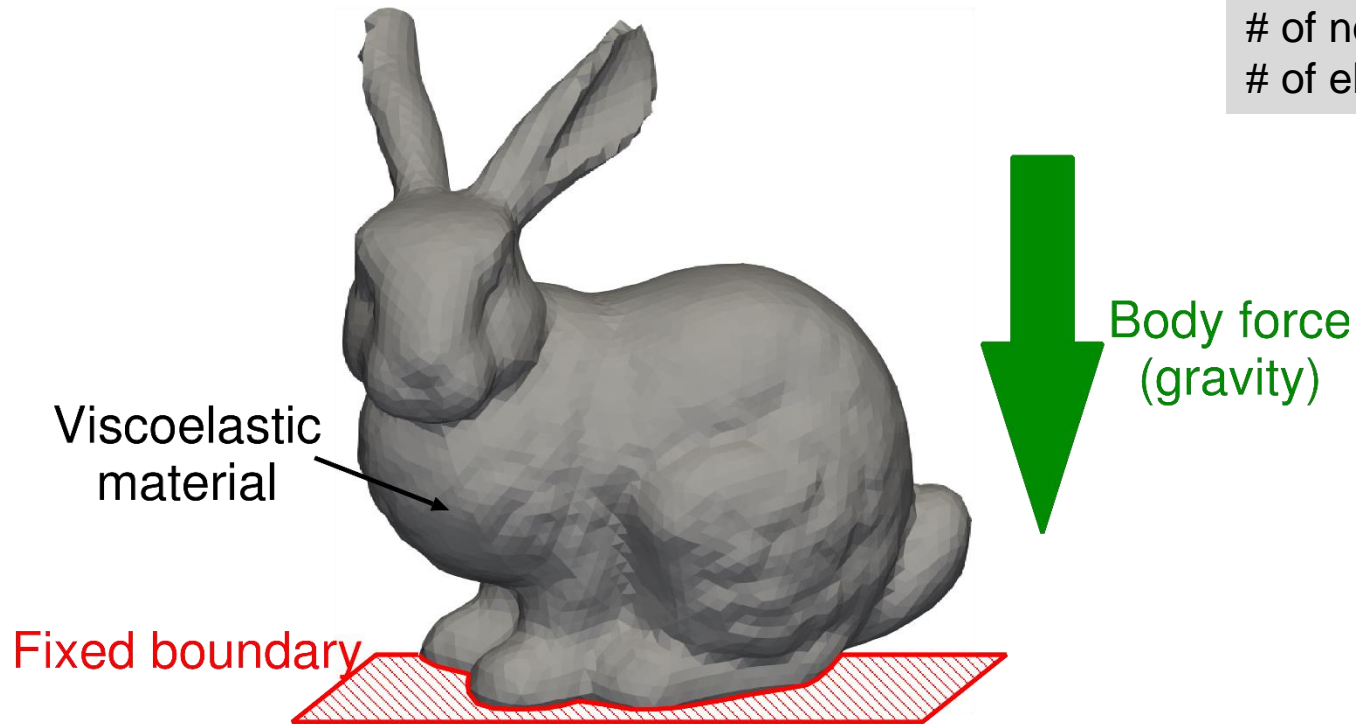


ABAQUS四面体ではいずれも硬い解しか得られないが、F-barES-FEM-T4では六面体と同等精度で解が得られている。

# 粘弾性ウサギの自重潰れ解析

## 概要

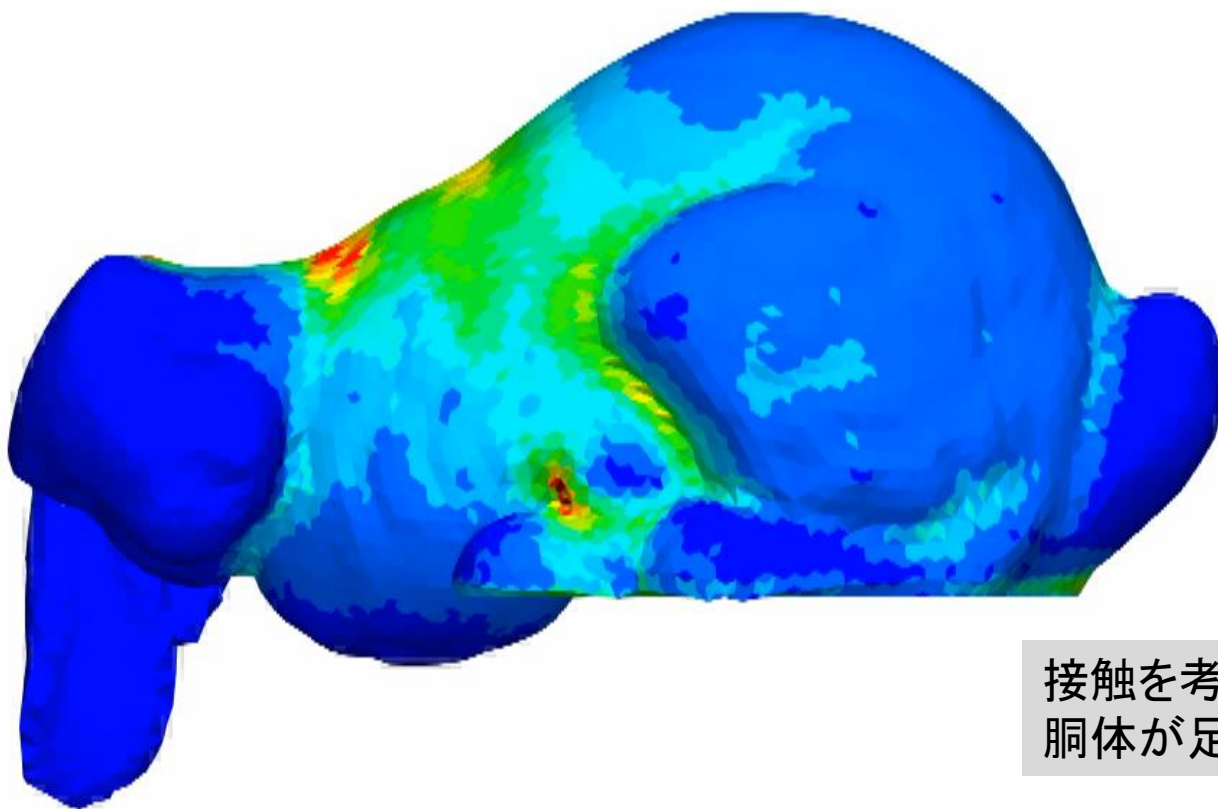
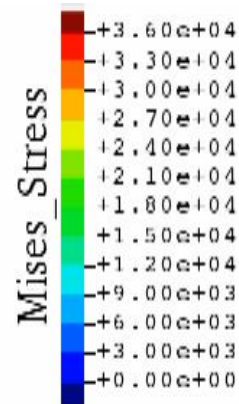
# of nodes: 24136  
# of elems: 126231



- ウサギ (Stanford Bunny) に重力を与え、自重で潰れさせる。ただし、接触は一切考慮しない。
- 粘弾性物性は前例題と同じ ( $\nu_0 = 0.3$ ,  $\nu_\infty = 0.49$ ,  $\tau = 10$  s)。
- F-barES-FEM-T4(2) および ABAQUS の 4 節点四面体ハイブリッド要素 (C3D4H) で解析。

# 粘弾性ウサギの自重潰れ解析

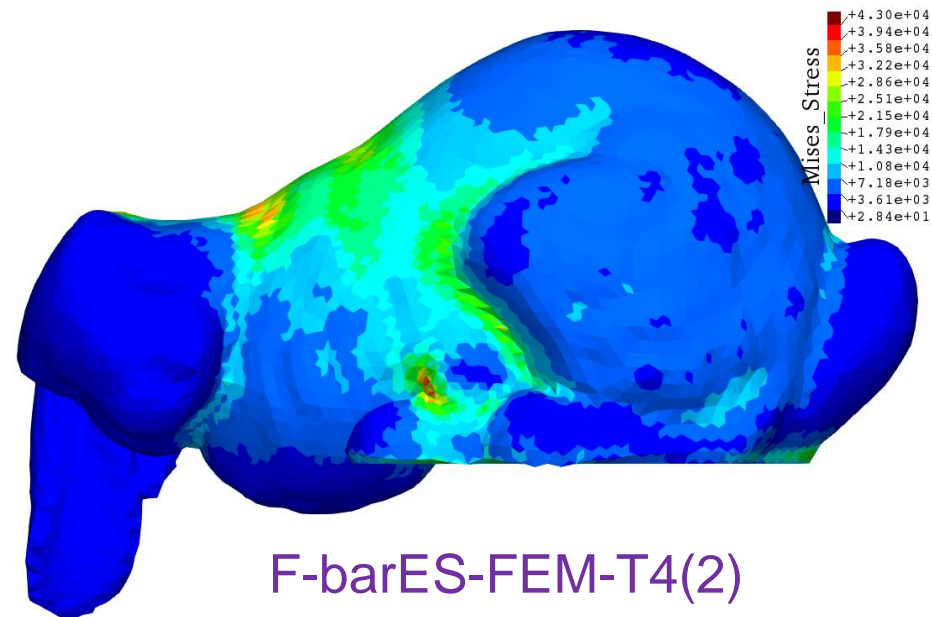
Mises  
応力分布  
アニメ  
F-barES-  
FEM-T4(2)



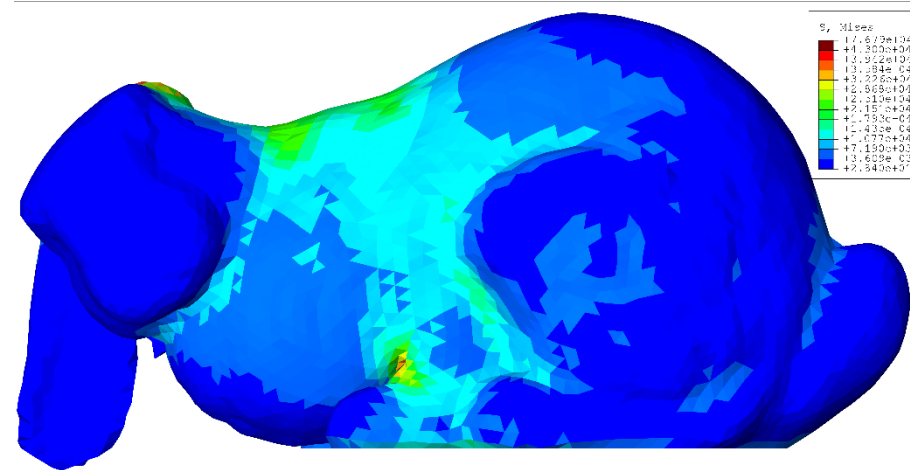
接触を考慮していないため  
胴体が足にめり込んでゆく。

# 粘弾性ウサギの自重潰れ解析

## 最終時刻でのMises応力分布 (コンターレンジは共通)



F-barES-FEM-T4(2)

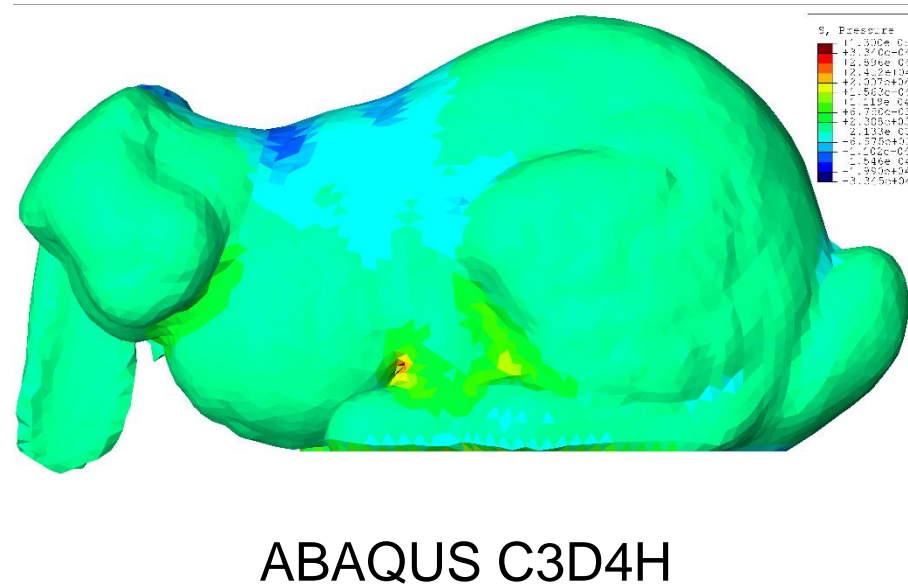
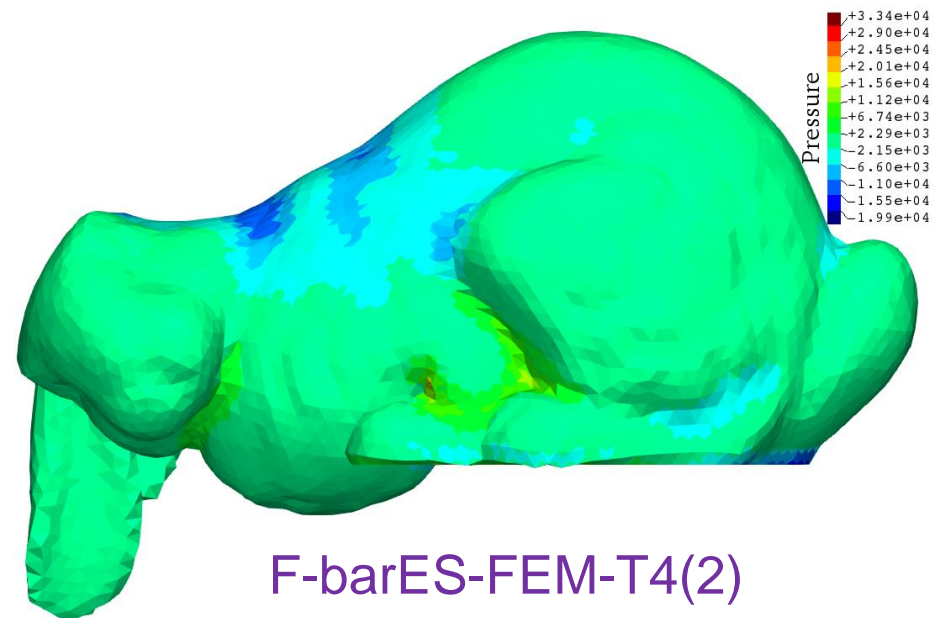


ABAQUS C3D4H

- ABAQUS C3D4Hはせん断ロックンクおよび足裏固定部周辺のコーナーロックンクのために相対的に硬い解が得られており、**F-barES-FEM-T4の方が柔らかく妥当な解である**と推察される。
- 両者共、変形が停滞する部分にわずかなMises応力振動が見られる。

# 粘弾性ウサギの自重潰れ解析

## 最終時刻での圧力分布 (コンターレンジは共通)

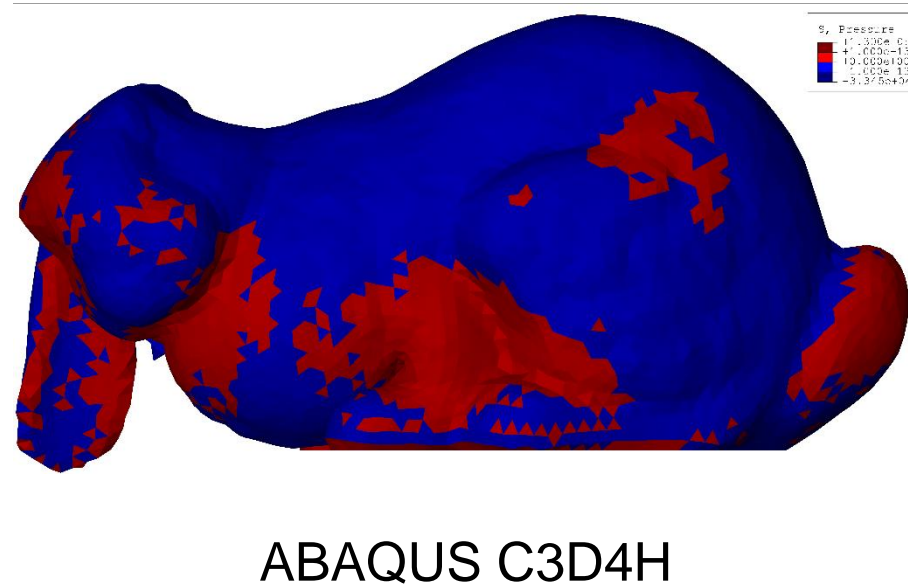
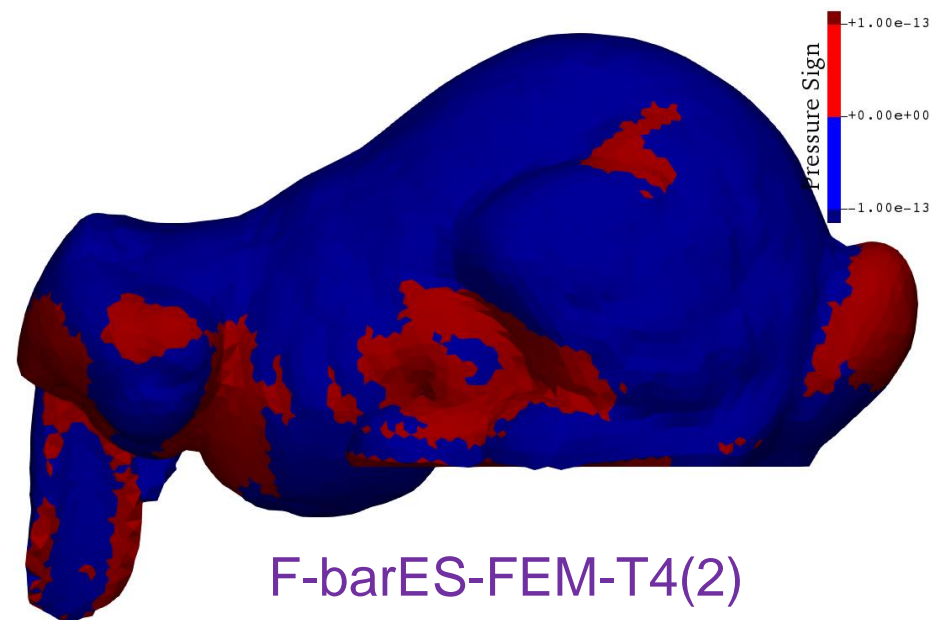


- まだ変形途中なので、全体的にはABAQUS C3D4Hにも目立った圧力振動は見られない。ただし...



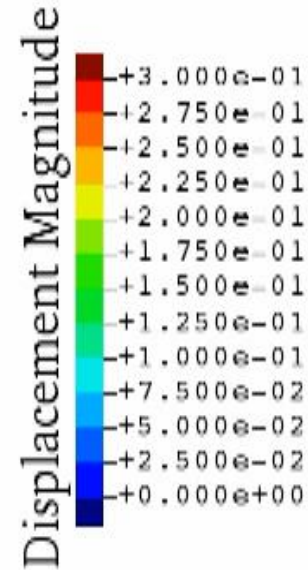
# 粘弾性ウサギの自重潰れ解析

## 最終時刻での圧力符号分布



- 圧力符号を見ると、ABAQUS C3D4Hでは変形が停滞する部分  
に若干の圧力振動があるが、F-barES-FEM-T4ではスムーズな  
圧力分布が得られている。

さらに  
計算を  
続ける  
と...



胴体が足に  
めり込み続け  
遂には  
ひっくり返る.

リメッシュ  
無しでも  
“牛のヨダレ”  
現象の解が  
得られる.



# まとめ

# まとめ

- 最新の平滑化有限要素法(S-FEM)定式化である **F-barES-FEM-T4**を用いれば、**超弾性体**や**弾塑性体**だけでなく**粘弾性体**でも
  - 4節点四面体要素(中間節点なし)
  - せん断／体積／コーナーロッキングフリー
  - 圧力振動フリー
  - 大変形でも安定が満足されることを示した.
- 内カベクトルの計算方法をわずかに変更することにより、**F-barES-FEM-T4(今年度版)**はこれまでよりも**大変形のロバスト性が向上していることが分かった。**

ご清聴ありがとうございました。